Durée : 3 heures

Les parties I *et* II *sont indépendantes*

I

1° Soit la matrice carrée d'ordre 2 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, que l'on considérera comme matrice d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$, relativement à la base canonique.

1° *a*. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

1° *b*. Déterminer B, matrice diagonale semblable à A, et calculer B^n où n est un entier strictement positif.

1° *c*. En déduire A^n.

2° On considère les matrices carrées d'ordre 3 :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2° *a*. Montrer que l'ensemble des matrices $M(x, y) = xC + yI$, où x et y sont des nombres réels, est un sous-anneau de l'anneau des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients dans $\mathbb{R}$.

2° *b*. Ce sous-anneau a-t-il des diviseurs de zéro?

2° *c*. Montrer que, pour tout entier n strictement positif, on a :

$C^n = a_n C + b_n I$, où a_n et b_n sont des nombres réels.

Calculer a_n et b_n.

3° On considère une suite chronologique d'expériences aléatoires :

$\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots$ Chaque expérience n'admet que trois résultats possibles : les événements E_1, E_2, E_3. A la $n^{\text{ième}}$ expérience, on associe le triplet (u_n, v_n, w_n) où u_n est la probabilité de E_1, v_n la probabilité de E_2, w_n la probabilité de E_3. On se donne le triplet (u_0, v_0, w_0).

On note p_{ij} (i et $j \in \{1, 2, 3\}$) la probabilité pour que E_j se réalise à une expérience sachant que E_i s'est réalisé à l'expérience précédente. La dépendance entre les réalisations successives est décrite par les probabilités :

$$p_{ij} = 0 \text{ si } i = j \quad , \quad p_{ij} = \alpha \quad , \text{ si } i \neq j.$$

(α est une constante indépendante de i et j.)

3° *a*. Calculer α.

3° *b*. Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de u_{n-1}, v_{n-1} et w_{n-1}.

3° *c*. Montrer que l'on peut représenter le passage du triplet (u_0, v_0, w_0) au triplet (u_1, v_1, w_1) et plus généralement au triplet (u_n, v_n, w_n) par une opération de calcul matriciel.

3° *d*. Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de u_0, v_0 et w_0.

Quelle relation vérifient u_n, v_n et w_n? Lorsque n augmente indéfiniment, vers quelles limites tendent ces trois probabilités?

II

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 1, et par polynôme, on entend un polynôme d'une variable réelle à coefficients réels.

1° Montrer par récurrence et sans les déterminer explicitement qu'il existe deux polynômes P_n et Q_{n-1} de degrés respectifs n et $n-1$, tels que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1, +1]$,

$$\cos[n.\text{Arc cos } x] = P_n(x) \text{ et } \sin[n.\text{Arc cos } x] = \sqrt{1 - x^2}\, Q_{n-1}(x).$$

On rappelle que Arc cos prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, \pi]$.

2° Étudier les variations de la fonction cos [n.Arc cos x] sur l'intervalle $[-1, +1]$ et tracer son graphe pour $n = 2$ et $n = 3$.

.../...

E.N.S. FONTENAY ET ST-CLOUD (sc. nat.) 1980 - 24 -

3° On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}$$

3° *a.* Montrer que la fonction $y = \cos[n.\text{Arc cos } x]$ est solution de l'équation (1) sur tout intervalle

$$\left]\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}, \quad \cos\frac{2k\pi}{n}\right[,$$

k étant un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$.

3° *b.* On suppose qu'il existe un nombre réel α, $0 < \alpha < 2$ et une application f de l'intervalle $I =]1-\alpha, 1[$ dans $\mathbb{R}$, dérivable, solution de l'équation (1) sur cet intervalle.

Montrer que si $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$, alors $f(x) = \cos[n.\text{Arc cos } x]$ pour tout $x \in I$.

4° Si P est un polynôme de degré n, on note :
$M = \sup_{x \in [-1, +1]} |P(x)|$ et $E(P) = \{x \in [-1, +1] / |P(x)| = M\}$

Montrer que M est un réel strictement positif et que E (P) est un ensemble fini non vide dont le cardinal noté card E (P) est inférieur ou égal à $n+1$.

Déterminer E (P_n), P_n étant le polynôme défini en 1°.

5° On se propose de déterminer tous les polynômes P de degré n tels que card E (P) $= n + 1$.

Soit P un polynôme de degré n tel que card E (P) $= n + 1$. On numérote les éléments de E (P) $= \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de telle sorte que $x_0 < x_1 < ... < x_n$.

5° *a.* Montrer que $x_0 = -1$, $x_n = +1$.

5° *b.* Montrer que si $0 < i < n$, x_i est une racine double du polynôme $M^2 - P^2$, M étant défini en 4°.

5° *c.* En déduire que P vérifie la relation

$$(2) \qquad M^2 - P^2(x) = \lambda_n (1-x^2) P'^2(x)$$

pour tout x réel, P' étant le polynôme dérivé de P, λ_n étant un nombre réel.

5° *d.* Montrer que $\lambda_n = \frac{1}{n^2}$ et que, sur l'intervalle $]x_{n-1}, 1[$ la relation (2) équivaut à

$$\frac{P'}{\sqrt{M^2 - P^2}} = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{P'}{\sqrt{M^2 - P^2}} = \frac{-n}{\sqrt{1-x^2}}$$

5° *e.* Montrer que les seuls polynômes de degré n tels que card E (P) $= n + 1$ sont les polynômes $P = \lambda P_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail